

**03**

# Coordenadas Cartesianas y Funciones Lineales

**Primer Ciclo, Segundo Año**

Asignatura	Tema	Libro Asociado
Matemática	Coordenadas cartesianas Funciones Lineales	<u>Funciones Elementales.</u> <u>Para construir modelos</u> <u>matemáticos</u>

Material elaborado por el Instituto Nacional de Educación Tecnológica, Ministerio de Educación de la Nación.

**Autora:** Prof. Ing. Haydee Noceti.

**Diseño Gráfico:** Carolina Macedra y Federico Timerman.

[www.inet.edu.ar](http://www.inet.edu.ar)

## Orientaciones para el/la docente

Somos conscientes, como docentes del rol que, en el momento actual, cumple la **motivación** en los alumnos y en las alumnas para el aprendizaje de los contenidos curriculares, en especial en el caso de los saberes matemáticos que presentan tantas dificultades para los/as alumnos/as. Dificultades que se traducen en obstáculos para el aprendizaje.

Existen numerosos estudios de matemáticos sobre este tema. Entre ellos citamos a **Herscovics** (1989) quien trabajó las dificultades en su relación con el álgebra, pero que pueden ser trasladables a otras ramas de la Matemática.

**Herscovisc** afronta la problemática desde varias perspectivas:

- 1) **Desde la histórica**, en el caso del Álgebra por ser una disciplina relativamente joven con un crecimiento lento pues maneja elementos no numéricos como la aritmética, ni figurativos como la geometría.
- 2) **Desde la epistemológica**, se trata de dificultades propias e inherentes al propio desarrollo de las nociones algebraicas: por su representación simbólica y por su alto grado de abstracción.
- 3) **Desde la psicológica**, se refiere a cómo cada estudiante construye el conocimiento y cómo modificar las estructuras ya construidas.

**Socas** (1997) aporta una propuesta más generalista que Herscovics. Si bien las dificultades pueden ser consideradas como un entramado de variables que tienen que ver con el macro y microsistema educativo, desde el rol docente las variables del microsistema educativo pueden ser paliadas.

Volviendo a Socas, este matemático agrupó las dificultades en cinco grandes categorías:

### Dificultades asociadas a:

- los objetos matemáticos;
- la complejidad de los procesos del conocimiento matemático;
- procesos de enseñanza, en los que intervienen: institución, currículo y métodos de enseñanza;
- procesos de desarrollo cognitivo de los/as alumnos/as;
- actitudes afectivas y emociones hacia la matemática.

Recordando el triángulo *profesor/a - alumno/a - saber o contenido*, las dificultades se pueden ver desde donde se ponga el foco de atención.

### EN EL/LA DOCENTE

Es importante el conocimiento que posea el/la profesor/a:

- las dificultades están asociadas a la institución, al currículo y a los métodos de enseñanza,
- en este aspecto cobra importancia la actualización permanente en estrategias didácticas y tener criterios comunes institucionales.

### EN EL SABER O CONTENIDO

Se debe considerar:

- la complejidad de los objetos matemáticos;
- no se puede evitar la propia naturaleza, pero sí se puede disminuir la dificultad con una adecuada transposición didáctica.

### EN LOS/AS ESTUDIANTES

Las dificultades deben considerarse en los procesos de:

- pensamiento matemático, proceso de desarrollo cognitivo,
- actitudes afectivas y emociones hacia la Matemática

Las dificultades provocan obstáculos. Resulta conveniente que el/la profesor/a conozca el significado del obstáculo y los tipos detectados.

Un **obstáculo** es un conocimiento que resulta adecuado en un determinado dominio, pero cuando ese dominio se amplía o cambia proporciona respuestas erróneas.

**Brousseau** (1983) distingue tres tipos de obstáculos:

- 1) **De Origen Ontogenético**: problemas de enfermedades o trastornos psicológicos o físicos.
- 2) **De Origen Didáctico**: problemas de enseñanza y de la práctica docente, el diseño y el contenido del currículo o el diseño de las secuencias de aprendizaje.
- 3) **De Origen Epistemológico**: propios del conocimiento. Son de carácter universal. Están en la génesis del concepto.

Y, ahora cabe la pregunta ¿cómo se manifiestan los obstáculos?

Los obstáculos se manifiestan en el aprendizaje a través de la aparición de errores y por su propia naturaleza como conocimiento aprendido se interponen en la adquisición de nuevos conocimientos.

¿Cómo vencer dificultades y obstáculos?

Aquí juega un rol importante el perfil del profesor o de la profesora.

<b>PROFESOR/A</b>	<b>POSITIVO/A</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Responsable. Diseña secuencias de aprendizaje que ayuden a superar dificultades y obstáculos</li> <li>• Originados no solo por su desempeño.</li> </ul>	<b>NEGATIVO/A</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Responsable de algunas dificultades y obstáculos</li> <li>• Causa de los errores en las respuestas de los/as alumnos/as.</li> </ul>
-------------------	--	--

**Tall** (1989) propone observar la secuencia de los contenidos, pues a veces la secuencia lógica crea dificultades en el aprendizaje. Asimismo, considera que muchos obstáculos cognitivos están relacionados con el principio de "**extensión genérica**". El uso de contraejemplos constituye una buena herramienta para vencer ese tipo de obstáculos.

**Socas** (1997) parte del principio que el conocimiento se construye a partir de los conocimientos previos que posee cada uno/una de los/as estudiantes. En este sentido promueve la evaluación diagnóstica, ya sea al comienzo de la unidad didáctica o bien durante su desarrollo, con el propósito de detectar errores y su naturaleza, para así poder diseñar acciones que permitan eliminarlos. Por otra parte, durante el proceso el/la profesor/a al detectar un error en el conocimiento que se está aprendiendo debe inmediatamente resolverlo.

**Tall y Schwarzenberger** (1978) proponen las siguientes líneas de acción.

- Elegir cuidadosamente la definición, la motivación del concepto.
- Conocer profundamente la naturaleza de los objetos matemáticos, y las relaciones que se establecen entre ellos.
- Conocer las experiencias previas de los alumnos, con las que han construido las estructuras cognitivas sobre las que se apoya el nuevo conocimiento.

Los/as profesores/as tenemos conocimiento, por propia experiencia, de las dificultades que tienen los/as estudiantes durante el aprendizaje de la Matemática. Esas dificultades se manifiestan en los errores que los/as alumnos/as cometen.

Entre las dificultades, muy común en el aprendizaje de la Matemática, destacamos el trabajo en el "plano cartesiano": la ubicación de puntos mediante sus coordenadas, la lectura de las coordenadas de puntos pertenecientes a los ejes, no comprender el sentido del par ordenado, etc.

En este sentido es que presentamos estas actividades mediante el uso de tecnología multimedia en el entendimiento que, de este modo, se puede ayudar a conocer los saberes que poseen los/as alumnos/as y, en el caso de detectar errores, que la estrategia utilizada facilite modificar el error provocando un buen aprendizaje.

Consideramos que los medios de información y comunicación ya sean informáticos como audiovisuales: software específico, Internet, el video, la música, etc., forman parte de la vida de nuestros jóvenes y, por lo tanto, son herramientas sumamente motivadoras.

Por ello, consideramos que las aplicaciones multimedia<sup>1</sup> interactivas, utilizadas en forma apropiada, constituyen medios poderosos para desarrollar en el/la alumno/a sus potencialidades, creatividad e imaginación.

---

<sup>1</sup> Multimedia: *adj.* Que utiliza conjunta y simultáneamente diversos medios, como imágenes, sonidos y texto, en la transmisión de una información ([www.rae.es](http://www.rae.es)).

## Actividades para los/as estudiantes

### ACTIVIDAD

Estudiamos matemática con la música y el arte pictórico. Coordenadas cartesianas. Representación de la función lineal y ecuación de primer grado (Reconocimiento de saberes previos)

### Una breve introducción

"Cuando escuchamos música, ¿sentimos que está presente la matemática?" "Cuando miramos una pintura, por ejemplo "Las Meninas" de Velázquez, ¿vemos matemática?" "El compositor musical, cuando escribe una partitura, ¿usa saberes matemáticos?" "¿Y el pintor?"

Para dar respuesta a estas preguntas te presentamos las siguientes actividades. También queremos que te hagas las siguientes preguntas y anotes las respuestas en un papel.

¿Cuáles son tus expectativas respecto al desarrollo de la temática planteada?

¿De qué manera creés que podemos ayudarte a conseguir tus expectativas?

Utilizamos la música y el arte pictórico como elementos que consideramos motivantes, pero seguramente habrás escuchado, a través de las películas o mediante hechos reales que, para ubicar lugares, objetos o bien a las personas, dan o solicitan las "coordenadas". Esto significa que la temática es muy importante y que, a los fines de tu aprendizaje, la vas a usar en otros contenidos, en especial en las funciones.

### Contenidos y objetivos

Contenidos	Objetivos
Coordenadas cartesianas de puntos en el plano. Rectas en el plano: representación gráfica en el plano cartesiano. Expresiones de la ecuación de la recta	1. Reconocer, reflexionar y evaluar los conocimientos previos que se requieren para iniciar el aprendizaje del tema de las funciones cuadráticas, mediante una actividad que involucra al arte musical y pictórico. 2. Valorar la importancia de la autoevaluación.

### Modalidad

Estas actividades pueden realizarse en forma presencial o a distancia. Si las realiza a distancia, puede hacerlo mediante *Google Classroom 2020*. Puede obtener información sobre su aplicación en: <https://www.youtube.com/playlist?list=PLcIJ8nSI2c7KrzlQ3kkHARAvyWgFe9g1v>

### Planteo de situaciones problemáticas

#### I. El problema que plantea Gustavo

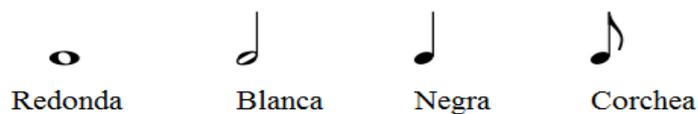
Gustavo, un alumno del curso, está dando los primeros pasos en la música. Su profesor le explicó el significado del pentagrama y la ubicación de las figuras musicales en él, los tiempos y la altura o

frecuencia de los sonidos, los compases, y le expresó que podía comprender mejor si le pedía ayuda a su profesor/a de Matemática.

Gustavo muestra su cuaderno de música donde se puede leer el siguiente texto:

El pentagrama tiene 5 líneas y 4 espacios. En él se ubican las notas musicales y las claves de sol y de fa. Las notas son: do, re, mi, fa, sol, la, si. La unidad de tiempo se representa mediante las figuras musicales asignadas a cada sonido. Las figuras son: redonda, blanca, negra, corchea, semicorchea, fusa y semifusa. La redonda representa la unidad, se toma como referencia para el valor de las otras figuras.

Los valores de los tiempos referidos a la redonda son: valor de la blanca igual a  $\frac{1}{2}$  de la redonda, valor de la negra igual a  $\frac{1}{4}$  de la redonda, valor de la corchea igual a  $\frac{1}{8}$  de la redonda, valor de la semicorchea igual a  $\frac{1}{16}$  de la redonda, valor de la fusa igual a  $\frac{1}{32}$  de la redonda y valor de la semifusa igual a  $\frac{1}{64}$  de la redonda.



### Figuras musicales

Una partitura está ordenada por secciones denominadas compases, que son separados por líneas divisorias verticales, cada frase musical entre las líneas conforma un compás. Cada compás tiene una cifra indicadora escrita mediante una fracción: el denominador indica la unidad de tiempo, dada por una figura musical y el numerador la cantidad de veces que se repite la unidad de tiempo dentro del compás. Por ejemplo:  $\frac{4}{4}, \frac{3}{8}, \frac{2}{4}$

## II. El problema que plantea Coni

Cuando Coni escuchó este relato, alumna del curso como Gustavo, contó que estudia pintura y que su maestro le explicó que en las pinturas se podían encontrar elementos de la matemática. El profesor le encargó a Coni la tarea de indagar sobre la matemática en "La última cena" de Leonardo da Vinci y en "Las Meninas" de Diego Velázquez.



La última cena de Leonardo da Vinci



Las Meninas de Diego Velázquez

### III. Recursos didácticos

Computadora, tablet o celular.

Software: *GeoGebra*, *MuseScore*, *Word*, *Editor de ecuaciones del Word* (constituye una herramienta digital que facilita a los/as docentes y a los/as estudiantes escribir en lenguaje matemático).

El software **GeoGebra**, de distribución gratuita, te permite aprender Matemática de una forma agradable dejando de lado, en algunos aspectos, engorrosos ejercicios geométricos manuales que a veces obstaculizan el real aprendizaje. Por otra parte, el *GeoGebra* permite trabajar la geometría, el álgebra y la vinculación entre ambas.

Para descargarlo recurre a la siguiente página: <https://www.geogebra.org/classic?lang=es-AR>

El programa tiene Ayuda, pero también podés hacerlo a través de YouTube, por ejemplo en: [https://www.youtube.com/watch?v=CGXy7G9b\\_5s](https://www.youtube.com/watch?v=CGXy7G9b_5s)

El software **MuseScore**, también es de distribución gratuita, te permite crear música o sea escribir partituras.

Descárgalo en <https://musescore.org/es/download/musescore.msi>

Si necesitás ayuda, recurre a la Ayuda que te da el mismo programa o bien a YouTube, por ejemplo mediante el tutorial: <https://www.youtube.com/watch?v=bJvWpKobEsc>

### IV. Consignas de trabajo

#### A) Abordamos el problema de Gustavo para estudiar las coordenadas cartesianas en el plano.

Como Gustavo tiene problemas con la lectura y la ubicación de las notas y figuras en el pentagrama, para que comprenda la escritura musical podés ayudarlo realizando la siguiente actividad, que permite relacionar una partitura con los saberes matemáticos.

1) Mediante el uso de las herramientas del software *MuseScore* te solicitamos que:

- a) escribas dos partituras de ocho compases cada una, en clave de sol, con la unidad del compás:  $\frac{4}{4}$  y  $\frac{2}{4}$ , respectivamente;

- b) busques diferentes alternativas mediante la prueba de sonido hasta lograr la que más te guste;
- c) la partitura elegida archívala con extensión *mscz*.

2) A través de la aplicación *GeoGebra* te solicitamos que:

- a) representes las funciones  $y = 1$ ,  $y = 2$ ,  $y = 3$ ,  $y = 4$ ,  $y = 5$  (cada una representa una de las líneas del pentagrama) y cuatro segmentos perpendiculares a dichas líneas por los puntos de coordenadas: (3,0); (6,0); (9,0); (12,0); (15,0); (18,0), (21,0) que representan las líneas de separación de los compases;
- b) en este pentagrama, transcribe las partituras escritas con el software *MuseScore*, reemplazando las figuras por puntos.

**Tendrás que buscar la forma, que consideres conveniente, para diferenciar los puntos entre sí, según la figura que cada uno represente. Por ejemplo, puede ser mediante distintos colores.**

Con los datos de las coordenadas de cada punto deberás construir una tabla (x, y).

x	y

3) En el *MuseScore* transcribí los primeros ocho compases de la partitura (mano derecha) del Himno de la Alegría de la Novena Sinfonía de Beethoven. Escúchala usando diferentes instrumentos y escribí en una hoja tu sentimiento cuando la oís.



4) Dibuja un pentagrama usando el *GeoGebra*.

- a) Fija como unidad de medida en el eje "y" la separación entre las líneas del pentagrama y en el eje "x", la separación menor entre las figuras negras.
- b) Transcribe mediante puntos los cuatro primeros compases de la partitura del Himno a la Alegría. Usa los mismos colores definidos en el punto 2 para identificar a las figuras.

- c) Confecciona para cada compás una tabla (x , y) indicando las coordenadas de cada punto representativo de las figuras. En el caso de los puntos situados en los espacios tendrán que ser considerados por aproximación.

5) En otro sistema de coordenadas similar al descrito en el ítem 3, deberás representar los últimos cuatro compases del Himno de la Alegría.

Tendrás que escribir las coordenadas de:

- a) todos los pares ordenados de puntos de igual ordenada;
- b) cuatro puntos de ordenadas decrecientes y abscisas crecientes.

6) Representa en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales los siguientes pares ordenados:

- a) (1,2); (2,4); (3,5); (4,3.5)
- b) (6,3);(7,3);(8,3);(10,3)
- c) (2,1);(3,2);(3,3);(3,4)
- d) (5,4);(6,3);(7,2);(8,1)

Imaginando que cada grupo de pares ordenados constituye un compás de una partitura, se te solicita que escribas dicha partitura eligiendo las figuras, y la transcribas mediante el software *MuseScore*.

Prueba con distintos instrumentos.

Posteriormente deberás guardarla en extensión *mscz*.

## B) Abordamos el problema de Coni para estudiar funciones y ecuaciones de primer grado o lineales.

Te solicitamos que busques una imagen de la pintura "La última cena" de Leonardo da Vinci y una imagen de "Las Meninas" de Diego Velázquez, aunque las presentamos anteriormente, para la actividad se necesita que tengan un tamaño mayor.

Comenzamos la actividad con: "**La última cena**", por eso te pedimos que:

- 1) leas el ítem 6.1.1 ¿Cómo hacer para pintar en perspectiva? (capítulo 6 del libro "Las Geometrías": <http://www.inet.edu.ar/index.php/material-de-capacitacion/nueva-serie-de-libros/las-geometrías/>);
- 2) insertes en el software *GeoGebra* la imagen que buscaste;
- 3) sobre dicha imagen traza, por lo menos nueve líneas con un punto de fuga, centradas todas sobre la frente de Cristo y marcadas por las características arquitectónicas, como por ejemplo las vigas del techo, las líneas de las ventanas, los solados, el ancho de la mesada, la distribución de los personajes, etc. Para esta tarea analiza las posibles alternativas y fundamenta la opción elegida. Relaciona con la lectura del ítem 6.1.1 del libro "Las Geometrías".

En la Vista Algebraica podrás observar en forma implícita, las expresiones matemáticas de cada una de las funciones lineales que son representativas de las rectas trazadas.

En este caso, tendrás que expresar, en forma explícita, cada una de dichas expresiones y determina las coordenadas de los respectivos puntos de intersección de cada una de las rectas con el eje "x" y con el eje "y".

Define por comprensión el conjunto dominio y el conjunto imagen.

Para la situación de intersección con el eje "x" verifica tus cálculos con los dados en la vista CAS.

Los cálculos los podrás realizar con lápiz, papel y calculadora o en la hoja *Excel* del *GeoGebra* o mediante el Editor de ecuaciones del Word.

Ahora seguimos con "**Las Meninas**".

En esta obra, el pintor usó elementos matemáticos tales como figuras geométricas y líneas con un punto de fuga. Esta situación resulta propicia para que analices la pintura buscando algunos de estos elementos.

Por eso, te solicitamos que:

- 1) insertes la imagen de Las Meninas en el *GeoGebra*,
- 2) busca y dibuja sobre la imagen los elementos geométricos que encuentres, por lo menos dos figuras y tres rectas con el mismo punto de fuga.

En la Vista Algebraica estarán indicadas las expresiones matemáticas, en forma implícita de cada una de las funciones lineales, representativas de las rectas, ya sea de los lados de las figuras seleccionadas o de las rectas con punto de fuga.

En este caso, te solicitamos que:

- 1) expresas en forma explícita cada una de dichas expresiones;
- 2) defines por comprensión el conjunto dominio y el conjunto imagen;
- 3) determina las coordenadas de los respectivos puntos de intersección de cada una de las rectas con el eje "x" y con el eje "y".

Para la situación de intersección con el eje x tendrás que verificar tus cálculos con los dados en la vista CAS.

Los cálculos los podrás realizar con lápiz, papel y calculadora o en la hoja *Excel* del *GeoGebra* o mediante el Editor de ecuaciones del Word.

Ya finalizaste las actividades. Al comienzo te pedimos que respondas a dos preguntas y que las respuestas las escribas en una hoja. Ahora te pedimos que las leas y que respondas a estas dos preguntas:

¿La realización de estas actividades responden a tus expectativas? En cualquiera de tus respuestas te pedimos que escribas el porqué de ellas.

**¡GRACIAS!**

**FUENTE:** Noceti, H. (2019). Trabajo final. Máster Universitario en Didáctica de las Matemáticas en Educación Secundaria y Bachillerato. UNIR, España (página 12).