

04

Isometrías. Las transformaciones en el plano

Primer Ciclo, Segundo Año

Asignatura	Tema	Libro Asociado
Matemática	Isometrías	Las Geometrías

Material elaborado por el Instituto Nacional de Educación Tecnológica, Ministerio de Educación de la Nación.

Autora: Prof. Ing. Haydee Noceti.

Diseño Gráfico: Carolina Macedra y Federico Timerman.

www.inet.edu.ar

Orientaciones para el/la docente

Las transformaciones geométricas

¿Por qué cuando nos enfrentamos a un espejo nos vemos?

Leemos en el poema de Jorge Luis Borges (1977)

*Nos acecha el cristal. Si entre las cuatro
paredes de la alcoba hay un espejo,
ya no estoy solo. Hay otro. Hay el reflejo
que arma en el alba un sigiloso teatro.*

¿Por qué Borges dice que no está solo?

Estas preguntas pueden ser expresadas a los/as alumnos/as al comienzo del desarrollo del tema de Isometrías, como preguntas motivadoras.

Por otra parte, una buena forma de relacionar las isometrías con el mundo real es el de presentar un lugar en el mundo donde estas transformaciones matemáticas están presentes para deleite de los visitantes: La Alhambra de Granada, España. Más aún donde existe mucho más de la Geometría.

La Alhambra está ubicada en la colina La Sabika de Granada. Si bien su construcción original tuvo un propósito militar, fue un fortín, un palacio y una ciudad.

Construida en el siglo IX, recién en el siglo XIII pasa a ser residencia real del reino nazarí con la construcción del Palacio por Mohammed Ibn Yusuf ben Nasr, conocido como Alhamar.

En 1492 los Reyes Católicos toman la ciudad de Granada. Posteriormente construyen el Palacio de Carlos V.

Para comprender la geometría que encierra La Alhambra recordamos el significado del término "teselación" o "teselado".

Teselar una superficie plana significa que, mediante una figura patrón, se cubre la totalidad de la superficie sin que se superpongan ni dejen huecos.

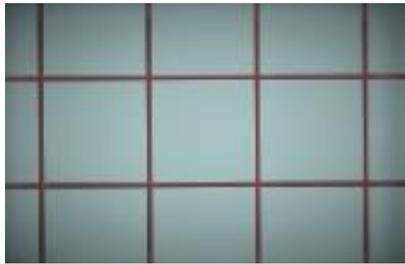
Existen diferentes tipos de teselaciones: las regulares, las semirregulares y las irregulares.

Solo existen tres posibilidades de teselaciones regulares poligonales: con patrón triangular, cuadrangular y hexagonal. En cada caso el patrón es el mismo en todos los vértices.

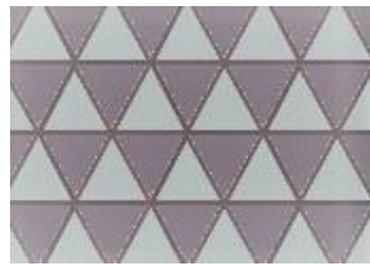
Teselado regular hexagonal



Teselado regular cuadrangular



Teselado regular triangular

**Figura 1: Teselaciones regulares poligonales**

Otra definición que tenemos que dar es la del término: **mosaico**.

¿Qué es un mosaico?

Un **mosaico** es una composición con losetas que reproducen figuras, paisajes, etc. En el caso que se trate de rellenar el plano (teselar el plano) mediante isometrías se está en presencia de un mosaico geométrico.

Las transformaciones en el plano se combinan entre sí, constituyen estructuras algebraicas que son los denominados grupos cristalográficos. Durante años, fue una incógnita saber la cantidad posible de estructuras básicas posibles para las ornamentaciones. Fue Evgraf Fedorov, quien demostró en el año 1891 que solo existen 17 grupos cristalográficos planos.

Evidentemente los creadores de los mosaicos de la Alhambra no supieron de esta afirmación, por eso emociona saber que ellos, sin este conocimiento lo usaron miles de siglos antes de su descubrimiento.

Por razones religiosas, el arte morisco no presenta figuras humanas en sus creaciones. Podría pensarse que esta limitación pudo haber obstaculizado su creatividad, pero al parecer por los fascinantes trabajos que nos dejaron ocurrió todo lo contrario, estimuló al artista musulmán a realizar obras pictóricas llenas de belleza.

Los 17 grupos del plano se agrupan en cinco apartados, según el orden máximo de los giros:

- Grupos de simetría sin giros: 4 grupos de simetrías.
- Grupos de simetría con giros de 180° : 5 grupos de simetrías.
- Grupos de simetría con giros de 120° : 3 grupos de simetrías.
- Grupos de simetría con giros 90° : 3 grupos de simetrías.
- Grupos de simetría con giros de 60° : 2 grupos de simetrías.

Presentamos aquí algunas imágenes de mosaicos de la Alhambra donde se visualizan las distintas isometrías y sus combinaciones.

En las imágenes se pueden apreciar los grupos cristalográficos.

Para profundizar: <https://www.youtube.com/watch?v=wwUW2zUD3qM>



Figura 2: Mosaicos de La Alhambra

Contenidos

Tipos de isometrías

1) Traslaciones

La traslación se define como la isometría que realiza un cambio de posición o de un lugar en el plano y/o espacio, en el que se mantiene las direcciones y las longitudes.

Desde la Matemática se define a la traslación T como la transformación que a cada punto P de una figura se le asocia mediante un vector \vec{v} otro punto P' tal que $PP' = v$.

Las traslaciones conservan la forma y el tamaño de las figuras.

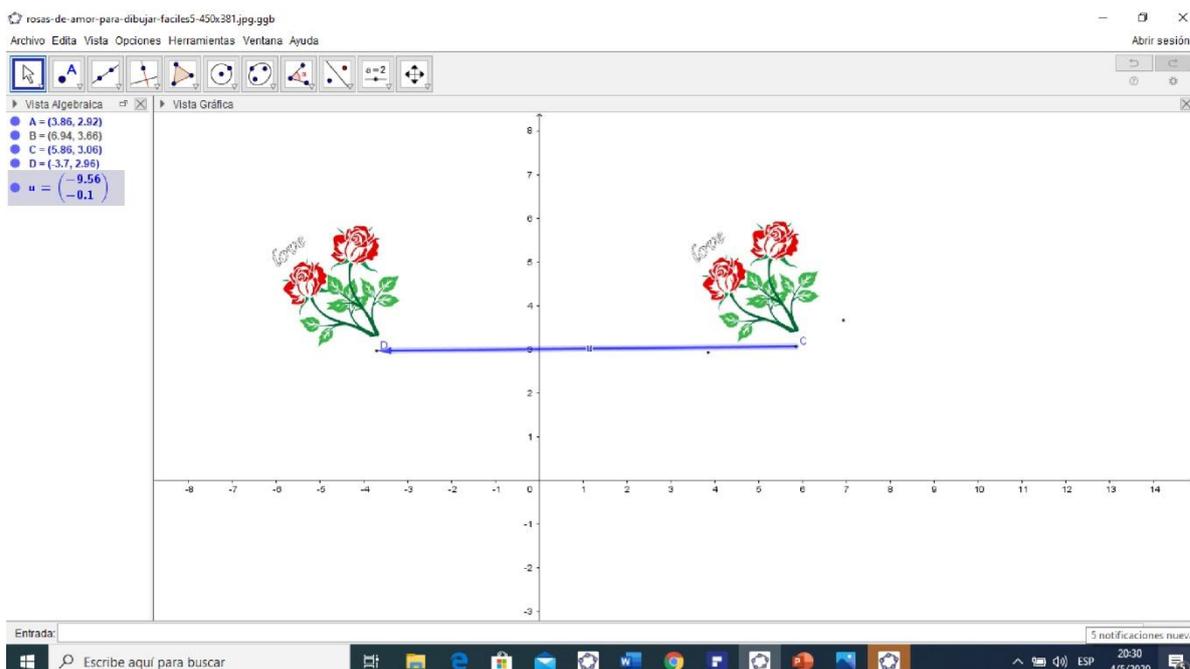


Figura 3: Traslación de una figura realizada con el GeoGebra

2) Rotaciones o giros

Dado un punto P del plano, un centro de giro O , un ángulo α y un sentido de giro, el punto que resulta de aplicar a P el giro de centro O y ángulo positivo o negativo α , es P' , tal que el ángulo POP' sea igual a α y OP sea congruente con OP' .

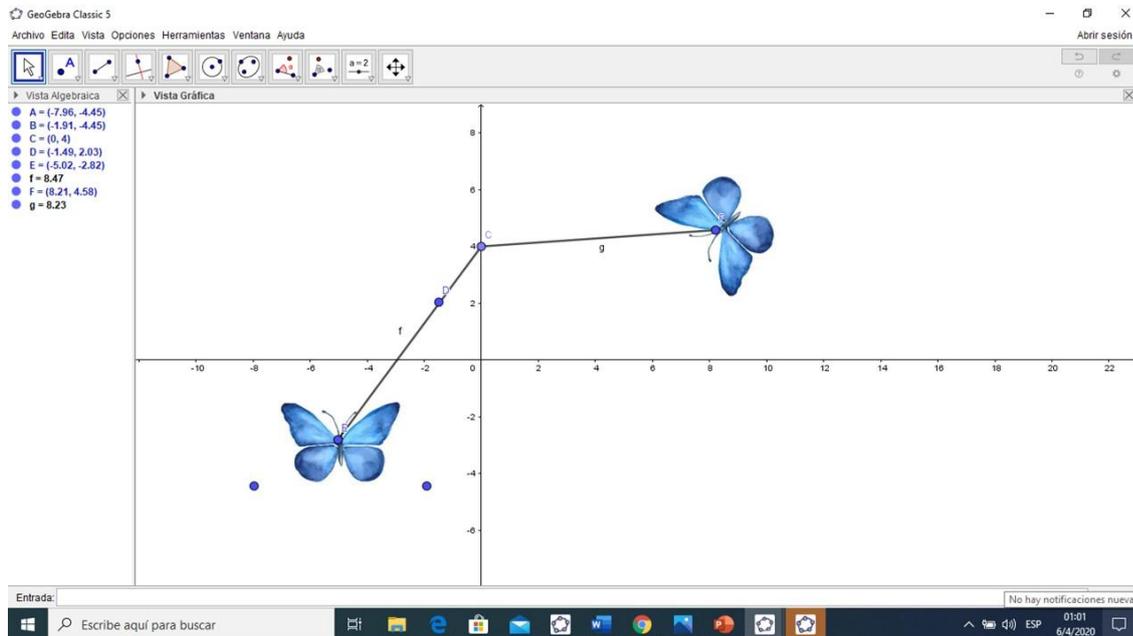


Figura 4: Rotación de una figura usando el GeoGebra

3) Simetría central

Dada una figura en el plano y un punto O , una simetría central de dicha figura con centro en O es la transformación que aplicada a cualquier punto P de la figura le corresponde otro punto P' , tal que la distancia de O a P es igual a la distancia de O a P' y los puntos P, O y P' pertenecen a una misma recta.

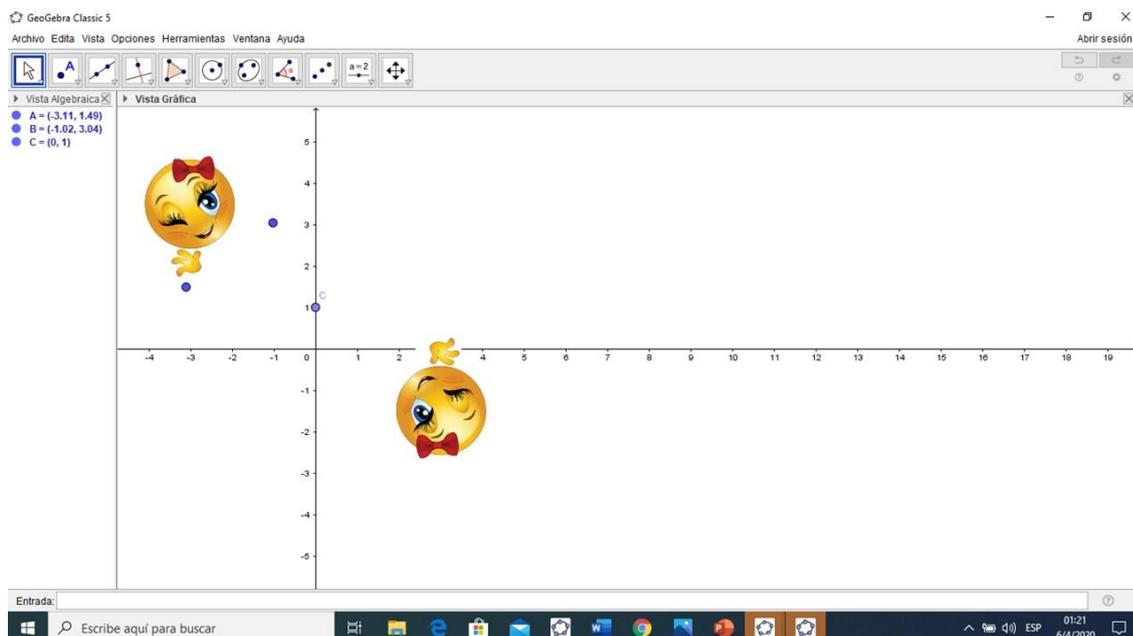


Figura 5: Simetría central de una figura usando GeoGebra.

4) Simetría axial

Dada una figura en el plano y un punto O , una simetría axial de dicha figura según un eje "e" es la transformación que aplicada a cualquier punto P de la figura le corresponde otro punto P' , tal que la distancia del eje "e" a P es igual a la distancia del eje "e" a P' y los puntos P , O y P' pertenecen a una recta perpendicular al eje "e".

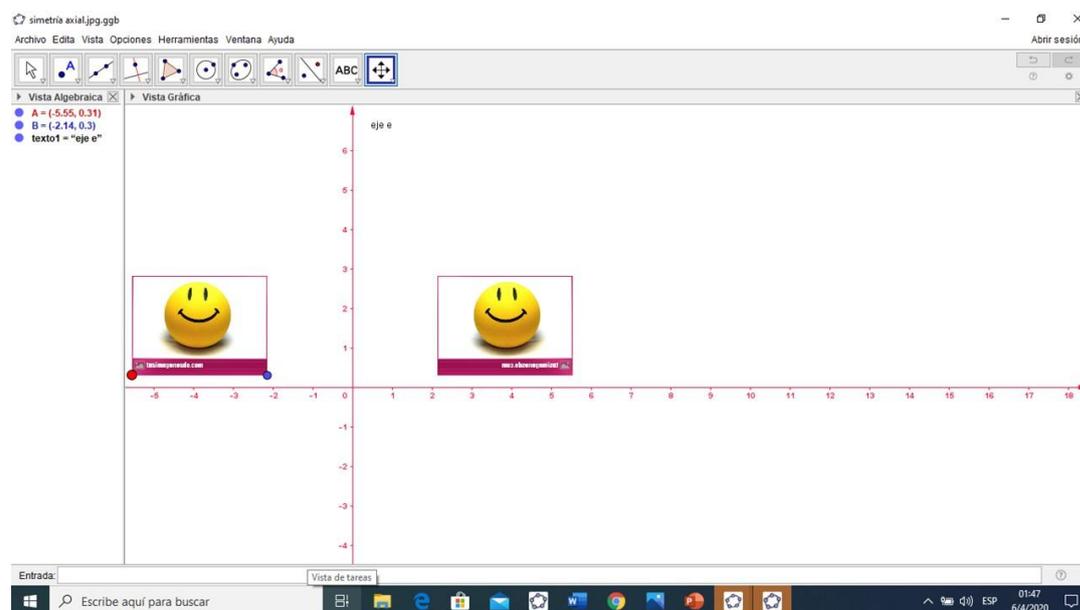


Figura 6: Simetría axial de una figura usando GeoGebra.

Para profundizar estos contenidos se puede leer el capítulo 4 del libro **Las Geometrías** en <http://www.inet.edu.ar/index.php/material-de-capacitacion/nueva-serie-de-libros/las-geometrias/> y ver los siguientes vídeos

<https://www.youtube.com/watch?v=RaongOgoEvg>

<https://www.youtube.com/watch?v=beq1odpZXdg>

Continuamos con aplicaciones de la simetría central

La cámara oscura y la simetría central

¿Qué es la cámara oscura?

La cámara oscura consiste en una "caja negra", sellada que tiene en una de sus paredes un orificio muy pequeño por donde pasa la luz, proyectando así la imagen exterior en forma invertida.

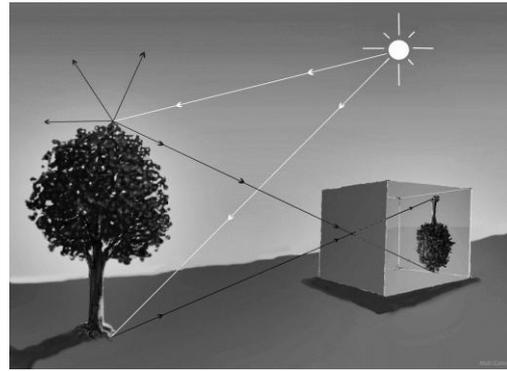
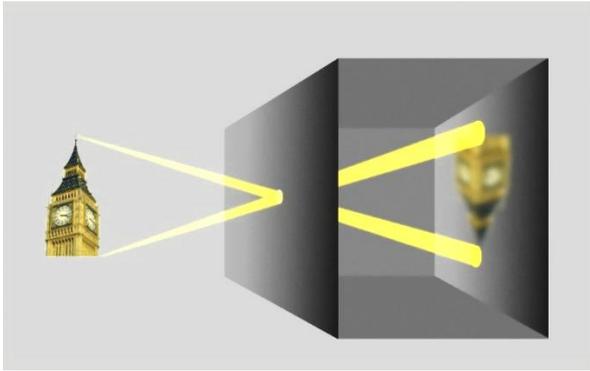


Figura 7: Esquema de una cámara oscura (Fuente: Documento sobre isometrías de la Maestría en Didáctica de la Matemática. UNIR. España)

Actividades para los/as estudiantes

TEMA

Isometrías en la realidad

CICLO

Primer ciclo (ex ciclo básico) Por lo general: segundo año.

MODALIDAD

Estas actividades pueden realizarse en forma presencial o a distancia. Si las realiza a distancia, puede hacerlo mediante *Google Classroom 2020*. Puede obtener información sobre su aplicación en: <https://www.youtube.com/playlist?list=PLclJ8nSI2c7KrzlQ3kkHARAvyWgFe9g1v>

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Elementos de la geometría plana, uso del software *GeoGebra*.

CAPACIDADES POR DESARROLLAR

- 1) Aplicar destrezas y desarrollar actitudes para razonar matemáticamente.
- 2) Discriminar formas, relaciones y estructuras geométricas.
- 3) Reconocer la geometría como parte integrante de la expresión artística de la humanidad.
- 4) Cultivar la sensibilidad y la creatividad, el pensamiento divergente, la autonomía y el apasionamiento estético
- 5) Desarrollar la curiosidad, la concentración, la perseverancia y la reflexión crítica.

HABILIDADES

Procesamiento de la información, destreza en la construcción de figuras isométricas, reconocimiento de propiedades de las isometrías, uso del *GeoGebra*.

RECURSOS

Software: *GeoGebra*, *Word*, *Editor de ecuaciones del Word* (constituye una herramienta digital que facilita a los/as docentes y a los/as estudiantes escribir en lenguaje matemático). Internet. Papel calco y papel tipo romaní.

ACTIVIDAD 1: Presentación del contenido

El/la docente presenta el contenido a través del *Google Classroom*, como conocimiento nuevo o para reforzar los saberes, si han sido ya aprendidos

ACTIVIDAD 2: Grupos de isometrías de los rosetones

Objetivos

- 1) Analizar las isometrías y sus propiedades en rosetones.
- 2) Aplicar las isometrías en la reconstrucción de figuras.

Consignas

I. A partir de la presentación del rosetón de Washington National Cathedral se les solicita que:

- Ubiquen el lugar geográfico donde se encuentra el rosetón de: Washington National Cathedral, indaguen en la historia, autor y materiales constructivos.
- Consideren una parte del rosetón y analicen las transformaciones que deben hacer para obtener las restantes.

II. La imagen que se presenta (Figura 9) corresponde a la mitad de un rosetón.

- Inserten dicha imagen en el *GeoGebra* y completen el rosetón. ¿Qué transformación realizaron? ¿Cuáles son los elementos de la/s isometría/s que aplicaron?
- Ubiquen la imagen en el tercer cuadrante y apliquen una rotación con centro $O(0,0)$ y ángulo $\alpha = 130^\circ$.
- Ahora, ubiquen a la figura en el primer cuadrante y apliquen primero una simetría respecto del eje "y" y luego una simetría central respecto del punto $A(0, -2)$.

III. Dada la imagen de la cuarta parte del rosetón completo (Figura 10), ¿qué isometrías deberán aplicar para completar la figura? ¿Cuáles son los elementos de la/s isometría/s que aplicaron?

- A partir de la siguiente figura (Figura 11) armar las tres cuartas partes de la imagen completa, en forma aproximada utilizando las isometrías y mediante el *GeoGebra*. ¿Indicar las isometrías utilizadas y cuáles son los elementos de las isometrías que aplicaron?
- Con la figura 11 y utilizando isometrías, en el *GeoGebra* apliquen una o varias isometrías en forma sucesiva de modo que se vuelva a la misma posición. ¿Qué transformación/ones aplicaron). Indiquen los elementos de cada una.

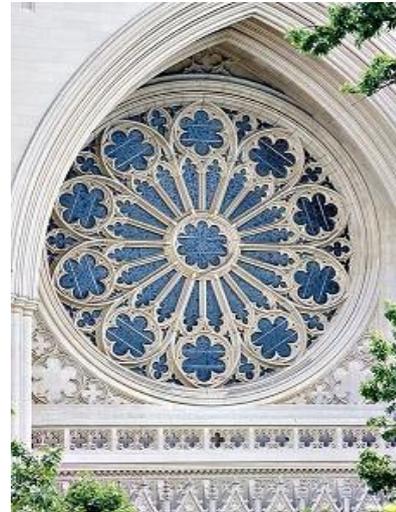


Figura 8: Rosetón de Washington National Cathedral (Fuente: <https://ar.pinterest.com/pin/445152744403569119/>)



Figura 9: Mitad del rosetón

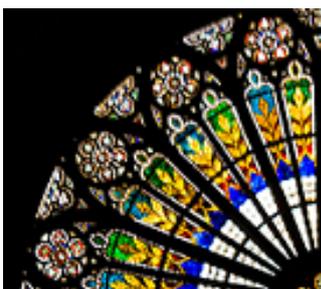


Figura 10: Cuarta parte del rosetón



Figura 11: Una parte del rosetón

IV. Ahora les presentamos la imagen de la bandera de Hong Kong y la de un copo de nieve.

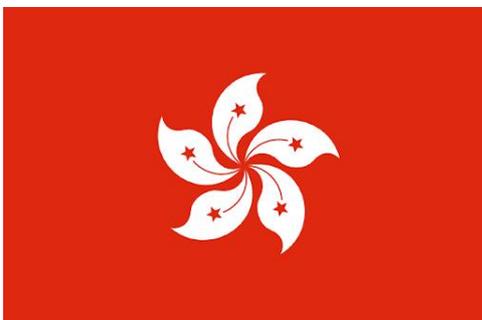


Figura 12: Bandera de Hong Kong



Figura 14: Estructura de un copo de nieve

- Investiguen el tipo de isometría, cuántas hay de ese tipo y cuáles son los valores de los ángulos de rotación que se presentan en la bandera de Hong Kong.
- Indaguen en los tipos de isometrías que se presentan en el copo de nieve, cuántas hay de cada tipo y los valores de los ángulos de rotación.

V. En plenario, a distancia, discutan las conclusiones de la Actividad 2.

ACTIVIDAD 3: Fabricando mosaicos

Objetivos

- Analizar las isometrías y sus propiedades en las teselaciones.
- Aplicar las isometrías en el diseño de teselaciones mediante el uso del *GeoGebra*.

Consignas

A partir de la presentación de la imagen de un mosaico nazarí de la Alhambra y de la figura que lo origina (Figura 15), se les solicita que:

1) Identifiquen cuál o cuáles son las isometrías que se obtienen a partir de la figura original.

2) Dibujen centros de rotación, ejes de simetría y vectores de traslación. Se pueden orientar observando la siguiente página:

<http://jmora7.com/Mosaicos/4200kind2.html>

3) Confeccionen piezas, en cartón o en cualquier material duro, similares a las originales del mosaico que les presentamos y armen el mosaico.

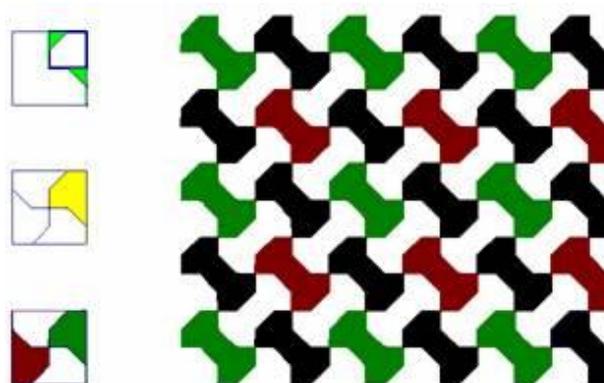


Figura 15: Mosaico nazarí.

- 4) Analicen a través del mosaico armado, según el punto anterior, las características que presenta una teselación.
- 5) Armen un mosaico utilizando las teselaciones regulares poligonales. Utilicen el *GeoGebra* (pueden usar el celular o la computadora).
- 6) Escher, artista holandés, estudió las teselaciones y se inspiró en los mosaicos nazaríes. Aquí les presentamos la imagen de una de sus obras con el propósito que analicen las isometrías que se presentan en ella.

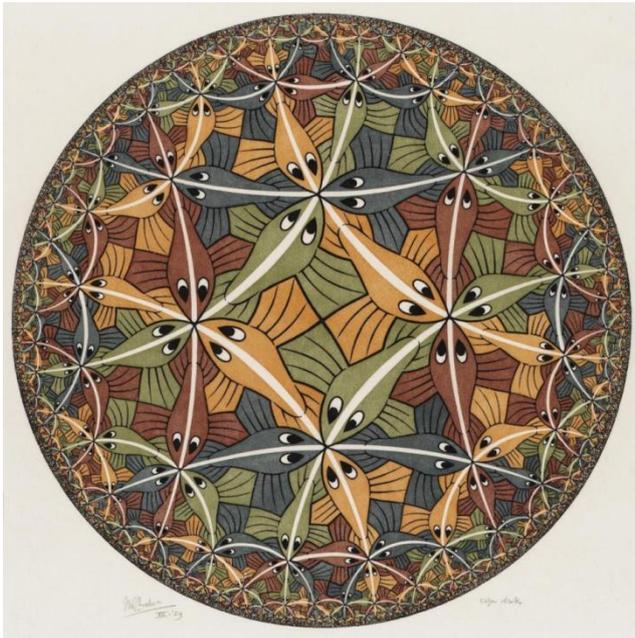
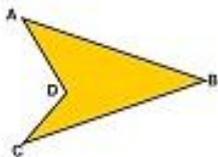
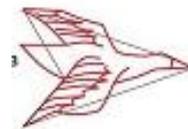


Figura 16: Mosaico de Escher.

- 7) Y ahora, ¡a armar teselaciones regulares, pero no poligonales! A partir de esta figura



diseñen un mosaico y luego superpongan la figura final



Pueden buscar ayuda en <http://ucua.ujaen.es/jnavas/mayores/archivos/isometrias.pdf>

- 8) Mediante el uso del *GeoGebra* transfórmense en artistas y diseñen dos teselaciones poligonales. Especificquen las isometrías y las propiedades que se presentan.

ACTIVIDAD V: Las isometrías en el arte

Objetivos

- 1) Utilizar las propiedades de las isometrías.
- 2) Analizar las isometrías y sus propiedades en las obras arquitectónicas.

Consignas

El Renacimiento se caracteriza por las exigencias racionalistas, a las cuales se subordina. Consecuencia de ello es que el edificio ideal es simétrico en todos sus ejes: vertical y horizontal. Les presentamos las imágenes de tres edificios: Ayuntamiento de Augsburgo y de Bremen y el Palacio de Christiansborg.

Analizar, en cada edificio, las simetrías y sus propiedades. Además, les requerimos que en papel transparente calquen la mitad de la silueta del Ayuntamiento de Augsburgo. Pasen dicha silueta a una hoja papel romañí blanco y completen el diseño con la parte faltante mediante la aplicación de las simetrías correspondientes.

Obtener una foto del trabajo realizado y compartir con tu docente y compañeros/as.



Figura 17: Ayuntamiento de Augsburgo (Alemania)



Figura 18: Ayuntamiento de Bremen (Alemania).



FIGURA 19: Palacio de Christianborg (islot de Slotsholmen en Copenhague, Dinamarca).

¡ÉXITOS!