

03

Funciones Cuadráticas

Segundo Ciclo, Tercer Año

Asignatura	Tema	Libro Asociado
Matemática	Funciones cuadráticas	Funciones Elementales. Para construir modelos matemáticos



Material elaborado por el Instituto Nacional de Educación Tecnológica, Ministerio de Educación de la Nación.

Autora: Prof. Ing. Haydee Noceti.

Diseño Gráfico: Carolina Macedra y Federico Timerman.

www.inet.edu.ar

Orientaciones para el/la docente

Durante el desarrollo de todas las actividades que presentamos, de alguna manera estamos aplicando una metodología innovadora. Se trata del enfoque denominado: *Flipped Classroom* o *Aula Invertida*.

El modelo pedagógico *Flipped Classroom* (Aula invertida) consiste en el aprendizaje fuera del aula de los/as alumnos/as, previo al tratamiento del tema que se realizará en la clase.

Este enfoque metodológico propone dar vuelta la clase tradicional, de modo que los/as estudiantes adquieran los saberes teóricos en sus casas, a través de la presentación en un video, o mediante otro recurso que el/la docente haya preparado y enviado mediante alguna herramienta digital. Posteriormente en clase, con la orientación del profesor o de la profesora se evacúan las dudas, se discuten, en forma grupal e individual, los conocimientos y los planteos que interesen a los/as estudiantes realizar sobre los saberes estudiados.

El rol del docente o de la docente está centrado en la creación de videos o en buscar de los existentes en la web, aquellos que le sean útiles a su propuesta, en diseñar infografías y cuestionarios interactivos, en supervisar las actividades solicitadas a los/as alumnos/as, en aclarar dudas, facilitar el trabajo colaborativo y ser, fundamentalmente, un/a facilitador/a y guía del aprendizaje.

En esta situación, las actividades que se presentan están pensadas para el trabajo de los/as estudiantes en sus casas. El/la profesor/a tiene el rol de facilitador, orientador, motivador, incentivador del aprendizaje de sus alumnos/as.

Ya en clase tendrá que indagar sobre los saberes aprendidos, aclarar las dudas, resolver las dificultades y profundizar lo estudiado.

La implementación de cualquier estrategia de enseñanza y de aprendizaje de las anteriormente descritas, requiere de algún recurso didáctico de apoyo. En el siguiente ítem se realiza un análisis de cada uno de los recursos que se pueden usar durante el proceso de enseñanza y de aprendizaje.

Los Recursos Didácticos

En virtud de los objetivos y las competencias a alcanzar se deben seleccionar las estrategias didácticas, los materiales y los recursos más apropiados para tal fin.

Los recursos didácticos forman parte del proceso de enseñanza y de aprendizaje, en el sentido que constituyen medios que facilitan ambos procesos.

Asimismo, las Tecnologías de la Comunicación e Información (TIC), seleccionadas y utilizadas en forma apropiada, favorecen el aprendizaje de los saberes matemáticos.

Para ello, se requiere que sean interactivas, que permitan trabajar en forma interdisciplinaria, que tengan un componente lúdico como elemento motivador y atractivo, que se puedan desarrollar las actividades en forma analítica y gráfica, que permitan la inserción de imágenes (fundamental para el trabajo con obras de arte), que sean amigables y de fácil uso.

Cuando se trabaja con el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) y el Aprendizaje Orientado a Proyectos (AOP), el uso de Internet cobra fuerza dado que el ABP y el AOP requieren de la búsqueda de información y de datos, de manera especial cuando se trabaja con problemas abiertos, donde la información y los datos son escasos. En este caso, el rol del profesor o de la profesora como orientador/a y facilitador/a del aprendizaje resulta fundamental. La información y los datos que se encuentran en las diferentes páginas de la web no siempre son confiables, en este caso la orientación sobre la búsqueda debe llevarse a cabo a través de pautas claras y precisas sobre las características que deben tener dichos materiales y recursos.

Por lo general, los/as jóvenes estudiantes son nativos/as digitales y esto favorece el aprendizaje, especialmente cuando se trata del ABP o del AOP.

Álzate, et al. (2013) afirma: " El uso de las TIC puede ser una gran herramienta para la incursión de la nueva metodología de enseñanza, ya que los estudiantes actuales están bastante inmersos en todo lo relacionado con la tecnología" (p. 546).

Otro recurso innovador lo constituye la Realidad Aumentada. Esta herramienta permite agregar valor a la realidad existente a través de un dispositivo tecnológico.

Sobre la situación real, por ejemplo: la imagen de un edificio, se incorpora información en forma virtual (historia, descripción desde lo arquitectónico, desde lo estructural y desde los elementos matemáticos que contiene). De este modo, la información sobre el mundo real se transforma en interactiva y digital, despertando el interés y la inquietud motivadora en los/as educandos/as.

Para todos los recursos referidos en los párrafos anteriores se requiere el uso de dispositivos tecnológicos. En este caso la autora propicia la utilización de computadoras, de móviles y de Tablet.

Los/as docentes son conscientes del rol que, en el momento actual, cumple la motivación en los/as alumnos para el aprendizaje de los contenidos curriculares.

Nadie puede negar que los medios de información y comunicación, ya sean informáticos como audiovisuales: software específico, Internet, el video, el audio, etc., forman parte de la vida de nuestros jóvenes y, por lo tanto, son herramientas sumamente motivadoras.

Las aplicaciones multimedia interactivas, utilizadas en forma apropiada, constituyen medios poderosos para desarrollar en el/la alumno/a sus potencialidades, la creatividad e imaginación.

Se propicia la utilización del *GeoGebra* por cuanto es un programa interactivo simple, amigable y con la ventaja educativa de combinar el tratamiento geométrico y el algebraico en forma simultánea y con la posibilidad de poder incorporar imágenes.

En el caso del modelo *Flipped Classroom* las presentaciones de los videos se pueden hacer a través de la herramienta *Edpuzzle*, ya que permite seleccionar los videos que el/la docente considere, editarlos, añadir audio explicativo, texto, ejercicios, preguntas abiertas y cerradas y asignarlos a cada uno de los/as alumnos/as.

Los/as estudiantes podrán compartir sus trabajos y los materiales de trabajo para la realización de sus actividades a través de la plataforma *Edmodo*.

En el proceso de enseñanza y de aprendizaje de jóvenes adolescentes, considerados como nativos digitales, tiene un valor agregado la utilización de las herramientas digitales, entre ellas se encuentran los videojuegos.

Los videojuegos, por lo general, no son del agrado de algunos educadores, de acuerdo con las afirmaciones de **Felicia** (2009): "...se asociaban a diversos estereotipos y se consideraban negativos para la salud mental y física de los jugadores" (p. 6). En cambio, existen docentes que consideran que los videojuegos presentan beneficios para el aula. Por lo general, no se diseñan para ser utilizados en el aula, no obstante, muchos de ellos presentan características que permiten convertirlos en pedagógicos.

El aprendizaje colaborativo encuentra en los videojuegos un aliado, ya que en algunos casos permiten desarrollar entre los participantes una actitud colaborativa, como el de los videojuegos por equipos. Por otra parte, al presentar reglas que los participantes deben cumplir, favorecen determinados objetivos formativos.

El/la docente debe seleccionar el videojuego que responda a los objetivos que se propone logren los/as alumnos/as, la edad y los perfiles de los/as participantes, así como la organización del aula y la de los/las estudiantes.

Al respecto **Felicia** (2009) afirma: "Una vez probados los videojuegos y tras decidirse a utilizarlos como recurso pedagógico, tiene que determinar la situación que será más beneficiosa para ayudar a sus alumnos. Han de tenerse en cuenta varios elementos clave, técnicos y contextuales, pedagógicos..." (p. 28).

Cuando las tecnologías de la información y la comunicación se aplican al proceso de enseñanza y de aprendizaje se transforman en verdaderas tecnologías del aprendizaje del conocimiento (TAC). Desde esta postura la autora incluye, en este trabajo, las herramientas digitales.

Recordando Conceptos Matemáticos y su Aplicación en la Arquitectura

Veamos qué se entiende por arcos y los diferentes tipos de arcos y columnas, como así también los recursos matemáticos utilizados en cada una de estas estructuras.

Los arcos son estructuras arquitectónicas con forma de curvas y que sirven para cubrir espacios.

Los tipos de arcos utilizados por Gaudí son los denominados: **parabólicos, catenarios y funiculares**.

Recordemos algunos conceptos matemáticos que aplicaremos al momento de utilizar el GeoGebra

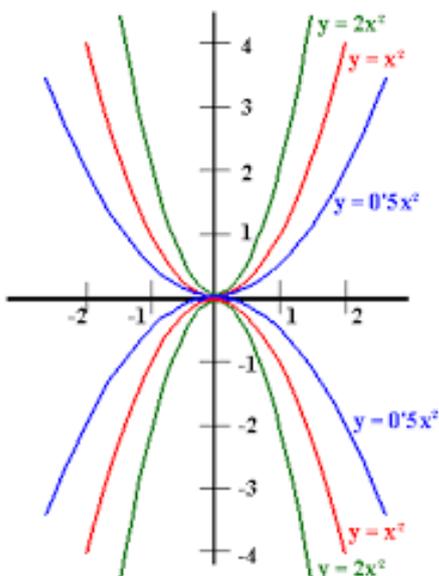
El **arco parabólico** es aquel que tiene la forma de una **parábola cuadrática**.

Una **parábola**, desde la geometría analítica, es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de otro punto fijo, denominado foco, y de una recta también fija, llamada directriz.

El modelo matemático de la parábola cuadrática, expresado en forma de fórmula es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ (en el caso de los arcos } a \text{ siempre es negativo)}$$

En forma gráfica mediante coordenadas cartesianas ortogonales:



Este tipo de arco, el parabólico, está presente en la obra de Gaudí en la entrada y en el interior del Palacio Güell, como se puede observar en las siguientes imágenes.



Puertas de entrada del Palacio Güell, Barcelona, España.

El **arco catenario** es un arco cuyo modelo matemático es el de la catenaria invertida, expresada la función catenaria mediante la siguiente fórmula:

$$f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \text{ como función coseno hiperbólico, o bien } f(x) = a \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} \text{ como función exponencial}$$

El modelo matemático del arco catenario en forma de gráfico es:

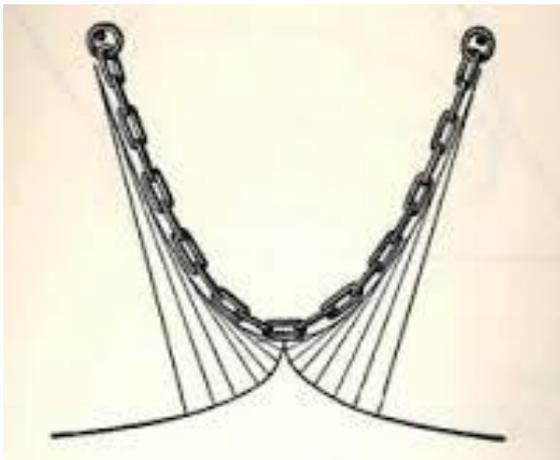


Gráfico de la catenaria como suma de dos gráficos exponenciales

El arco catenario es la forma ideal para el arco que está sometido a su propia carga.

En la obra de Gaudí encontramos este tipo de arco en un ventanal, en la puerta y en los pasillos del colegio de las Teresianas.

¿Qué diferencias y semejanzas existen entre estos dos tipos de arcos: parabólico y catenario?

Desde el punto de vista de la forma, el arco catenario adopta una traza similar al de una cadena cuando se cuelga de dos puntos y solo soporta su propio peso.

En el caso que la carga sea su propio peso más otra carga uniformemente repartida, al colgarla de dos puntos la cadena adopta la forma de parábola.

Desde el punto de vista de la Matemática, ambas curvas, se diferencian al hacer el estudio en los extremos.

Los límites de la parábola son:

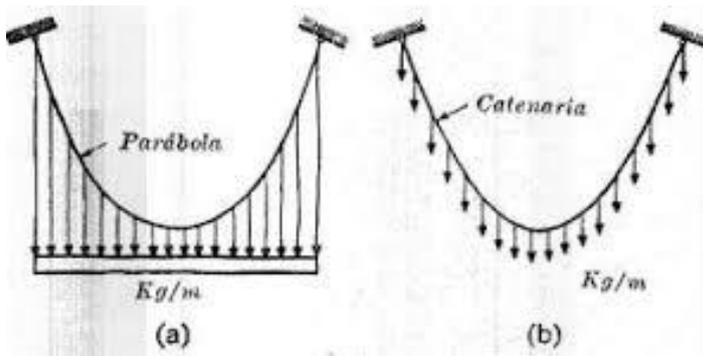
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$$

Esta expresión matemática nos está diciendo que la gráfica de la parábola cuadrática se abre indefinidamente para valores de x tendiendo a más y menos infinito.

El modelo matemático de los límites de la catenaria es:

$$\lim_{x \rightarrow \pm a} f(x) = \infty$$

En este caso la fórmula expresa que la catenaria no se abre como la parábola, sino que tiende a ejes perpendiculares a la abscisa en los puntos de coordenadas $(a; 0)$ y $(-a; 0)$.



El arco catenario es una curva fácil de construir. Se puede leer en la literatura referida a la obra de Gaudí que el procedimiento de construcción fue el siguiente:

- 1) se determinaba el valor de la luz del arco;
- 2) se clavaban dos clavos en la parte superior;
- 3) se fijaba el valor de la flecha;
- 4) se colgaba una cadena haciendo coincidir el punto más bajo con el de la flecha.

El carpintero encargado del encofrado construía la cercha con la forma de la cadena. Después la invertía y la colocaba en el lugar correspondiente.

Asimismo, Gaudí usó superficies regladas, tal como el **paraboloide hiperbólico** construido en el techo de la **Sagrada Familia**.

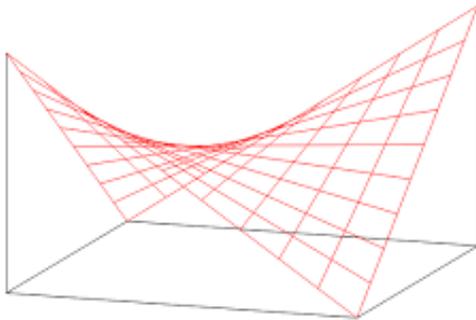
La denominación de superficie reglada deriva de la forma de construcción. Estas superficies se pueden construir mediante **rectas**



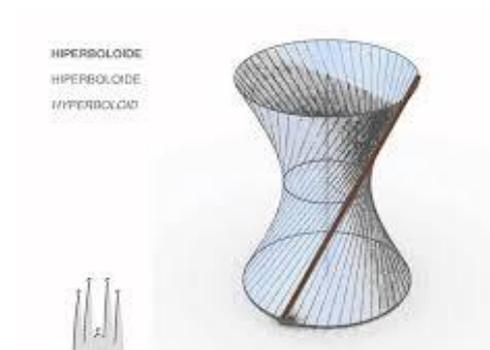
Vista aérea



Techo de la Sagrada Familia



Paraboloide hiperbólico como superficie reglada



Además del paraboloide existen otras superficies regladas. Por ejemplo, si una recta se mueve siguiendo una circunferencia situada en un plano perpendicular, genera la superficie de un cilindro. Si se gira un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, se genera un cono recto que es un sólido de revolución.

El conjunto de rectas que pasan todas por un punto e intersecan a una circunferencia no coplanaria, se denomina "superficie cónica".

Si se interseca una superficie cónica con un plano se obtienen las denominadas secciones cónicas, según sea el ángulo de inclinación y la posición relativa del plano.

Así se obtienen:

- 1) si el plano es perpendicular al eje del cono la figura que se obtiene es una **circunferencia**;
- 2) si el plano es paralelo a una de las generatrices (rectas) es una **parábola**;
- 3) si el plano interseca a todas las generatrices de un mismo lado la figura que se obtiene es una **elipse**;
- 4) si el plano interseca a todas las generatrices, pero de ambos lados, la figura es una **hipérbola**.

Actividades para los/as estudiantes

LAS ACTIVIDADES QUE SE PLANTEAN SON ORIENTADORAS, EL/LA PROFESOR/A LAS PODRÁ ADAPTAR, SI ASÍ LO CONSIDERA, A LAS CARACTERÍSTICAS DE SUS ESTUDIANTES.

Actividad: La Matemática, ¿dónde está?

Una breve introducción

Esta actividad está destinada a los/as estudiantes para el aprendizaje o para el refuerzo de saberes referidos a las parábolas y ecuaciones cuadráticas.

Las actividades planificadas se organizan en torno a la relación de la matemática y la arquitectura y con el deporte.

Como en el desarrollo de otras temáticas se utiliza el software *GeoGebra* y, en este caso se agrega un video que se puede ver a través de YouTube.

Contenidos y Objetivos

Contenidos	Objetivos
Las parábolas cuadráticas en los puentes colgantes y de arcos. Ecuaciones cuadráticas.	<p>Analizar el tipo de curvas planas de puentes de arcos y colgantes.</p> <p>Verificar resultados obtenidos mediante el GeoGebra.</p> <p>Discutir en plenario las actividades realizadas. Modelizar situaciones problemáticas reales.</p> <p>Demostrar actitud de colaboración, compromiso y responsabilidad frente a las tareas.</p>

Modalidad

Estas actividades pueden realizarse en forma presencial o a distancia. Si las realiza a distancia, puede hacerlo mediante *Google Classroom 2020*. Puede obtener información sobre su aplicación en: <https://www.youtube.com/playlist?list=PLclJ8nSI2c7KrzlQ3kkHARAvyWgFe9g1v>

Recursos

Software: *GeoGebra*, *Excel*, *Word*, *Editor de Ecuaciones del Word* (constituye una herramienta digital que facilita a los/as docentes y a los/as estudiantes escribir en lenguaje matemático). Internet.

ACTIVIDAD I. ¿La Matemática está en la Arquitectura?

Consignas

Para dar comienzo a esta actividad te solicitamos que veas el video: "La Matemática, ¿dónde está? ¿Está en las obras arquitectónicas?" en <https://www.youtube.com/watch?v=tY8gps3SjCs>

Complementa con la lectura del Capítulo 4: "Funciones cuadráticas", páginas 72 a 79 del libro: "**Funciones Elementales. Para construir modelos matemáticos**". Este libro digitalizado lo puedes bajar de:

<http://www.inet.edu.ar/index.php/material-de-capacitacion/nueva-serie-de-libros/funciones-elementales/>

Una vez que hayas observado el video y realizada la lectura comprensiva de las páginas del libro, te proponemos la siguiente situación problemática:

Situación problemática

Los puentes constituyen una construcción que permite salvar un accidente geográfico: un río, un valle, una carretera, una vía férrea... Existe una gran variedad de tipos de puentes, están los puentes viga, de arco, colgantes... En el caso de los puentes de arco y los colgantes, tienen estructuras con forma curva. Estas curvas pueden tener distintas formas geométricas, por lo general son arcos catenarios, parabólicos o semicirculares.

Esta situación permite pensar en el porqué las estructuras toman esas formas.

Como la pregunta inicial apunta a indagar dónde encontramos a la matemática, es una buena oportunidad para investigar.

Para ello, se plantean las siguientes consignas:

1) Busca imágenes, en la Internet que se vean de frente de los siguientes puentes:

- a) Puente Benson. Catarata Multnomah. Oregón. EE. UU. Estructura de acero.
- b) Puente del Milenio o Millennium Bridge. Estructura de acero que cruza el río Támesis. Londres. Inglaterra.

2) Busca a través del Google Maps la ubicación de cada puente. Realizar una breve descripción del lugar y de la tecnología constructiva del puente.

3) En forma intuitiva pensar el tipo de curva que forma cada uno.

4) Inserta en la herramienta *GeoGebra* la imagen de cada puente, una por vez, tratando que el vértice quede sobre el eje "y".

5) Sobre la imagen trazar por aproximaciones sucesivas la curva que, según la intuición de los/as estudiantes corresponde a la curva del puente que se está estudiando.

6) Analiza las diferentes alternativas gráficas y elegir la que consideren más aproximada a la real. Definir por comprensión el conjunto dominio y el conjunto imagen.

7) Analiza las expresiones matemáticas que se observan en la Vista Algebraica comparando los coeficientes de cada uno de los términos de las funciones cuadráticas y su relación con las gráficas correspondientes.

8) En la Vista Algebraica, seguramente la expresión de la función estará expresada en forma implícita, en este caso, deberán llevarla a la forma explícita.

9) Usando la Vista Cálculo Simbólico – CAS, determina las coordenadas de las intersecciones de la curva dibujada con el eje "x".

10) Determina las coordenadas de la intersección con el eje "y" y las coordenadas del vértice.

11) Verifica mediante el cálculo analítico los valores de coordenadas obtenidas en el punto h. Los cálculos los puedes realizar con lápiz, papel y calculadora o en la hoja *Excel* del *GeoGebra* o mediante el Editor de ecuaciones del *Word*.

ACTIVIDAD II. LAS PARÁBOLAS EN EL FÚTBOL

La Champions League y la Copa del Rey han generado en los jóvenes una discusión sobre la actuación de los jugadores del Barça, especialmente de Messi. Por supuesto que el grupo de estudiantes está dividido, por un lado, quienes opinan a favor y, por el otro quienes lo cuestionan. Unos recuerdan los penales errados, sobre todo con la selección argentina, y los otros muestran las genialidades en tiros libres.

Este grupo se apoya en este momento en la brillante actuación de Messi con la selección argentina en el partido amistoso contra Nicaragua jugado el 7 de junio de 2019.

Consignas

Te solicitamos que:

- 1) Observe el gol de Messi por YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=0sQUw2dNXRg>
- 2) Inserte en el *GeoGebra* la imagen del gol que Messi hizo a los 81 minutos del partido jugado con el Atlético de Madrid. Te brindamos la dirección de URL de la imagen del gol con el dibujo de la trayectoria de la pelota: https://www.google.com/search?q=LA+PARABOLA+DEL+golazo+de+messi+contra+el+Atl%C3%A9tico+de+mADRID&tbm=isch&source=univ&sa=X&ved=2ahUKEwjlivOT9dziAhVVH7kGHZOKAjoQ7Al6BAAgEEA0&biw=1517&bih=694#imgsrc=PS_sszSi1zIzDM:
- 3) Ubique la imagen de modo que el vértice de la curva coincida con la intersección con el eje "y".
- 4) Dibuje la curva por aproximaciones sucesivas sobre el dibujo de la imagen. Trabaja la imagen para que la expresión matemática que aparece en la Vista Algebraica no tenga términos en xy . Verifica el tipo de curva que por intuición y por los comentarios periodísticos se considera que resulta ser.
- 5) Traslade la expresión matemática de la función a la Vista CAS. Indicar qué significan los valores hallados y ubicarlos en la gráfica.
- 6) Verifique en forma analítica los resultados anteriores y halla las coordenadas del vértice de la parábola.
- 7) En la imagen aparece el valor de la distancia en línea recta de la trayectoria de la pelota. Aproximar a 30 m. Compara este valor con el valor en unidades del *GeoGebra*, y a partir de este dato encuentra el valor de la altura máxima que llegó la pelota.
- 8) Ensaye diferentes posibles trayectorias de la pelota desde distintas posiciones de Messi. En cada caso determinar analíticamente la distancia en línea recta de la trayectoria de la pelota.

Otro gol muy renombrado fue el que le hizo Nayim en la final de la Recopa europea 1995 entre el Zaragoza y el Arsenal, jugado el 20 de mayo de 1995. Un gol de media cancha, en este caso la trayectoria de la pelota en línea recta fue de 40 m.

Las consignas de las tareas son las mismas que las indicadas para el gol de Messi.

Como son numerosos los vídeos y no todos muestran la trayectoria parabólica, te brindamos la URL del vídeo que muestra esa trayectoria.

URL del vídeo del gol de Nayim <https://www.youtube.com/watch?v=TaHkrGwxRh8>

URL de la imagen del gol de Nayim con la trayectoria de la pelota

<https://www.heraldo.es/noticias/deportes/futbol/real-zaragoza/2015/05/10/parabola-un-sentimiento-358795-611027.html>

¡ÉXITOS!

FUENTE: Noceti, H. (2019). Trabajo final. Máster Universitario en Didáctica de las Matemáticas en Educación Secundaria y Bachillerato. UNIR. España.