06

Límites de funciones

Segundo ciclo, Cuarto Año

Asignatura	Tema	Libro Asociado
Matemática	Límite de funciones	Los Números. De los naturales a los complejos

inet | Instituto Nacional de Educación Tecnológica

Ministerio de Educación Argentina

Material elaborado por el Instituto Nacional de Educación Tecnológica, Ministerio de Educación de la Nación.

Autora: Prof. Ing. Haydee Noceti.
Diseño Gráfico: Carolina Macedra y Federico Timerman.

www.inet.edu.ar

Nueva definición de límite funcional

1. Una breve introducción

El concepto de límite ha evolucionado a lo largo de la historia desde la época clásica hasta la formulación métrica definida por Karl Theodor Weierstrass. A partir de investigaciones realizadas se concluyó que la definición de límite dada por Weierstrass, con una estructura muy formal, dificultaba el aprendizaje de los/las alumnos/as del nivel secundario. Es por ello por lo que Blázquez, S y Ortega, T. (2002) en el artículo: "Nueva definición de límite funcional", dan una nueva definición de límite funcional que, sin dejar de lado el rigor, no se muestra tan formal.

Los mencionados autores consideran que, a nivel secundario resulta más útil definir el límite funcional de manera similar a como lo hizo D'Alambert considerando el límite como aproximación o tendencia.

Entonces, las actividades que proponemos para los/as alumnos/as destinatarios/as responden a la siguiente definición:

Sea $\boldsymbol{f}$ una función y $\boldsymbol{a}$ un número perteneciente a los reales el número $\boldsymbol{L}$ es el límite de la función en el punto $\boldsymbol{a}$, se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = \boldsymbol{L}$, si cuando $x \to a$, siendo distinto de $\boldsymbol{a}$, sus imágenes $f(x), \to \boldsymbol{L}$.

De este modo el tratamiento del límite finito en un punto se hace como "aproximación óptima".

2. Desarrollo de la actividad

Se plantea el desarrollo de la actividad considerando el enfoque de *Flipped Classroom*. Recordando que este enfoque consiste en el aprendizaje fuera del aula de los/as alumnos/as, previo al tratamiento del tema que se realizará en la clase.

Este enfoque metodológico propone dar vuelta la clase tradicional, de modo que los/as estudiantes adquieran los saberes teóricos en sus casas, a través de la presentación en un video, o mediante otro recurso que el/la docente haya preparado y enviado mediante alguna herramienta digital. Posteriormente en clase o sesión presencial, con la orientación del profesor o de la profesora, se evacuan las dudas, se discuten, en forma grupal e individual, los conocimientos y los planteos que interesen a los/as estudiantes realizar sobre los saberes estudiados.

Cuando se habla de la clase o sesión presencial se quiere decir que están todos/as los alumnos/as reunidos con su profesor/a, puede ser en el aula física o en el aula virtual. En esta época, la clase o sesión seguramente será virtual.

Para la sesión presencial, se planifican actividades en forma secuenciada. Se comienza por la identificación de aproximaciones y tendencias en ejercicios con funciones simples (lineales y cuadráticas) para finalizar con actividades de profundización (límites de funciones no definidas en el punto donde se pide el límite y funciones definidas por partes).

UNIDAD DIDÁCTICA
Concepto de límite de una función en un punto. Cálculo de límites.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN
Utilizar el concepto de límite de una función aplicándolo en el cálculo del límite en un punto.

ESTÁNDAR DE APRENDIZAJE EVALUATIVO
Calcula límites finitos en un punto.

MODALIDAD
Estas actividades pueden realizarse en forma presencial o a distancia. Si las realiza a distancia, puede hacerlo mediante Google Classroom 2020. Puede obtener información sobre su aplicación en: *https://www.youtube.com/playlist?list=PLclJ8nSI2c7KrzlQ3kkHARAvyWgFe9g1v*

RECURSOS
Software: *GeoGebra*, *Word*, *Editor de ecuaciones del Word* (constituye una herramienta digital que facilita a los/as docentes y a los/as estudiantes escribir en lenguaje matemático) e Internet.

OBJETIVOS
1) Realizar aproximaciones de "x" a un punto en el conjunto dominio relacionándolas con las tendencias de f(x), usando registro numérico (tabla) y gráfico en coordenadas cartesianas.
2) Identificar y establecer aproximaciones óptimas entre valores próximos a otro dado.
3) Aplicar las aproximaciones óptimas en funciones definidas por partes y en funciones donde el valor de la función en x=a no coincide con el límite de la función en ese punto o donde no está definida.

4. Organización del trabajo

Actividades previas
Como se expresó en párrafos anteriores, el proceso de enseñanza y de aprendizaje de esta temática se realizará mediante la estrategia de *Flipped Classroom*, esto implica que los/as estudiantes tendrán que realizar una lectura comprensiva sobre una breve historia de la evolución del concepto de límite de una función hasta la definición dada por Blázquez, S y Ortega, T, motivo de esta propuesta. Como así también resolver un cuestionario sobre saberes previos que deben poseer los/as alumnos/as para el abordaje del concepto de límite de una función en un punto. Se les presentará también una breve explicación sobre el significa de los términos: aproximación y tendencia.

http://www4.uva.es/didamatva/investigacion/Publicaciones/nueva_definicion_limite_funcional.pdf

Actividades durante el desarrollo de las clases
Los/as estudiantes trabajarán en equipos de tres. En primera instancia, al principio de cada sesión el/la docente realizará una revisión, en la primera sesión será sobre los conocimientos previos y sobre la lectura del texto de Blázquez. En las clases posteriores siempre se comenzará con una pregunta disparadora para indagar como fue el aprendizaje anterior, resolviendo todas las dificultades o dudas que pudieran tener los/as alumnos/as.

Realizada esta primera fase, se les presentará las consignas de trabajo que deberán resolver los equipos con la orientación siempre del/ la docente. El cierre se realizará con la puesta en común de la actividad realizada.

CLASE 1. Actividad 1

De acuerdo con la cantidad de alumnos/as del curso destinatario se formarán 5 equipos. Todos los equipos realizarán la misma actividad, solo cambiará el punto a donde tiene el valor de x.

Grupo 1 Actividad 1, x tiende a 3
Actividad 2, x tiende a 2

Grupo 2 Actividad 1, x tiende a 4
Actividad 2, x tiende a -3

Grupo 3 Actividad 1, x tiende a -2
Actividad 2, x tiende a 4

Grupo 4 Actividad 1, x tiende a -3
Actividad 2, x tiende a 2

Grupo 5 Actividad 1, x tiende a 0
Actividad 2, x tiende a 0

Consignas

Se plantea el caso para el **Grupo 1**.

Dada la función $f(x) = x + 2$, examinen dicha función e investiguen: ¿qué sucede con $f(x)$cuando x tiende a 3? Para ello les solicitamos que:

a) Realicen una tabla en forma horizontal en la que se muestre los valores de $f(x)$ cuando x tiende por la derecha y por la izquierda a 3. Dejen vacío el lugar debajo del 3. Representen la situación en el GeoGebra (usen deslizadores). Marquen el punto de la gráfica de abscisa 3 con el símbolo del punto vacío y de color blanco.

b) Escriban la respuesta a la pregunta inicial en lenguaje coloquial.

CLASE 1. Actividad 2

Consignas

Dada la función $g(x) = x^2 + 2x + 1$, examinen dicha función e investiguen: ¿qué sucede con $g(x)$ cuando x tiende a 2? Para ello les solicitamos, de la misma manera que en el caso anterior que:

a) Realicen una tabla en forma horizontal en la que se muestre los valores de $g(x)$ cuando x se acerca por la derecha y por la izquierda a 2. Dejen vacío el lugar debajo del 2. Representen la situación en el *GeoGebra* (usen deslizadores). Marquen el punto de la gráfica de abscisa 2 con el símbolo del punto vacío y de color blanco.

b) Escriban la respuesta a la pregunta inicial en lenguaje coloquial.

Al término de ambas actividades presenten en plenario las dos actividades para la discusión con todo el curso.

En los casos presentados, tal vez los/as estudiantes pregunten el porqué, en vez de realizar las aproximaciones no buscaron directamente el valor de la función en los puntos para los cuales hicieron tender a x. La respuesta a esa pregunta la tendrán en las actividades de la segunda clase.

CLASE 2. Actividad 1

En esta sesión todos los equipos resolverán los mismos casos.

Consignas

Dada la función $h(x) = \frac{x^3 - 8}{x-2}$, examinen dicha función e investiguen: ¿qué sucede con $h(x)$ cuando x tiende a 2? Para ello les solicitamos, del mismo modo que en los casos estudiados en la Sesión 1 que:

a) Realicen una tabla en forma horizontal en la que se muestre los valores de $\mathrm{h}(\mathrm{x})$ cuando x tiende por la derecha y por la izquierda a 2. Dejen vacío el lugar debajo del 2. Representen la situación en el *GeoGebra* (usen deslizadores). Marquen el punto de la gráfica de abscisa 2 con el símbolo del punto vacío y de color blanco.
b) Escriban la respuesta a la pregunta inicial en lenguaje coloquial

CLASE 2. Actividad 2

Consignas

Dada la función $j(x) = \frac{x^2 + 1}{x+1}$, examinen dicha función e investiguen: ¿qué sucede con $j(x)$ cuando x tiende a -1? Para ello les solicitamos, de la misma manera que en los casos estudiados en la Sesión 1 que:

a) Realicen una tabla en forma horizontal en la que se muestre los valores de $j(x)$ cuando x se acerca por la derecha y por la izquierda a -1. Dejen vacío el lugar debajo del -1. Representen la situación en el *GeoGebra* (usen deslizadores). Marquen el punto de la gráfica de abscisa -1 con el símbolo del punto vacío y de color blanco.
b) Escriban la respuesta a la pregunta inicial en lenguaje coloquial.

Al término de ambas actividades presenten en plenario las dos actividades para la discusión con todo el curso, comparando también con los ejemplos resueltos en la sesión 1.

En esta sesión el/la docente presentará a los/las estudiantes la notación en lenguaje matemático (simbólico) del límite de una función en un punto:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

CLASE 3. Actividad 1

En esta clase todos los equipos resolverán los mismos casos

Consignas

Dada la función $m(x) = \frac{2}{x-1}$, examinen dicha función e investiguen: ¿qué sucede con $m(x)$ cuando x tiende a 1? Para ello les solicitamos, del mismo modo, que en los casos estudiados en las sesiones anteriores que:

a) Realicen una tabla en forma horizontal en la que se muestre los valores de $m(x)$ cuando x tiende por la derecha y por la izquierda a 1 (consideren 6 valores de cada lado). Dejen vacío el lugar debajo del 1. Representen la situación en el GeoGebra (usen deslizadores).

b) Comparen la tendencia de la función en x = 1 con el valor de la función en x = 1.

c) Escriban en lenguaje simbólico la expresión del límite para este caso.

CLASE 3. Actividad 2

En esta sesión todos los equipos resolverán los mismos casos.

Consignas

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x<1 \\ 2x-1, & x \geq 1 \end{cases}$ examinen dicha función e investiguen: ¿qué sucede con $f(x)$ cuando x tiende a 1? Para ello les solicitamos, del mismo modo, que en los casos estudiados en las sesiones anteriores que:

a) Realicen una tabla en forma horizontal en la que se muestre los valores de $\mathrm{f(x)}$ cuando x se acerca por la derecha y por la izquierda a 1 (consideren 6 valores de cada lado). Dejen vacío el lugar debajo del 1. Representen la situación en el GeoGebra (usen deslizadores).

b) Comparen la tendencia de la función en x = 1 con el valor de la función en x = 1.

c) Escriban en lenguaje simbólico la expresión del límite para este caso.

Al término de ambas actividades presenten en plenario las dos actividades para la discusión con todo el curso.

CLASE 4. Actividad Única

La clase comenzará con la lectura comprensiva del siguiente texto por parte de los/as alumnos/as: "El valor $\mathbf{L}$ es el límite de $f(x)$ en $\mathbf{a}$ si para todo valor $\mathbf{m}$ próximo a $\mathbf{L}$, existe otro valor $\mathbf{h}$ muy próximo a $\mathbf{a}$ tal que los $\mathbf{x}$ que mejoran ese valor $\mathbf{h}$, es decir que están más próximos a $\mathbf{a}$, hacen que sus imágenes $\mathbf{f(x)}$ también mejoren el valor cercano a $\mathbf{L}$, y estén más cerca de $\mathbf{L}$".

A esta altura del aprendizaje los/as alumnos/as ya están en condiciones de determinar, en forma intuitiva, el valor del límite de algunas funciones, como el caso que se les presenta:

Dada la función $g(x) = x^2 - 1$:

a) Representen la función en el *GeoGebra*.
b) Determinen el valor del límite para x tendiendo a 2: **L**, en forma intuitiva observando valores de la función f(x) para valores de x próximos a 2 o bien usando el *GeoGebra*.
c) Busquen, en la gráfica, cuatro valores próximos a L: $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$
d) Encuentren los valores $x_1, x_2, x_3, x_4,$ con el *GeoGebra*.
e) A partir de la aproximación 2,52 a L, ¿pueden encontrar alguna aproximación **h** a 2, de forma que mejore la aproximación anterior?
f) ¿Cuántas aproximaciones podrían encontrar? Justifiquen la respuesta.
g) Consideren otra aproximación a L, por ejemplo, m = 2,9966, ¿podrían encontrar una aproximación **h** a 2, de modo que los valores de **f(h)** estén más cerca de L?
h) Tomen ustedes una nueva aproximación **m** a **L** por la derecha y hallen una aproximación **h** a 2. También por la derecha, de tal modo que dichas aproximaciones mejoren la distancia de **h** a 2 y de **m** a **L**.
i) Realicen lo mismo que en el punto anterior, pero desde la izquierda.
j) ¿Entre qué valores por la derecha y por la izquierda han tomado la mejor aproximación a L? y, ¿la mejor aproximación a 2? Escriban como intervalo ambas aproximaciones.
k) Desde esta forma de analizar el concepto de límite, como aproximación óptima, ¿existe el límite para x tendiendo a 2?
l) Escriban en forma simbólica el límite de la función dada para x tendiendo a 2.

Al término de la actividad discutan en plenario.

5. Resultados

A modo de ejemplo se presentan posibles resultados obtenidos por los/as alumnos/as en la *Actividad 1 – Clase 2*.

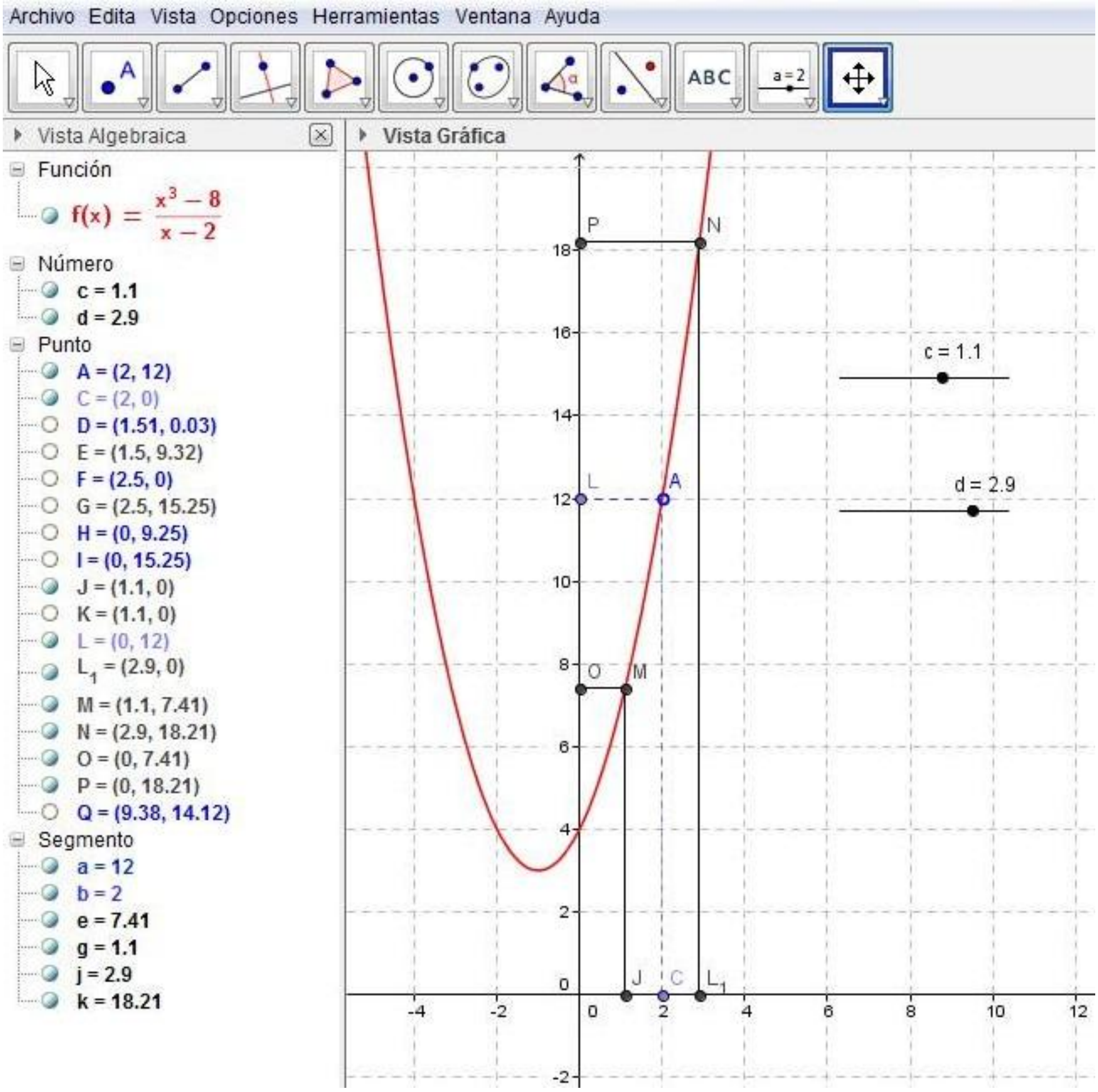
Se ha confeccionado la tabla solicitada y tres gráficos con diferentes aproximaciones

Tabla x tiende a 2 desde la izquierda ⟶ ⟵ x tiende a 2 desde la derecha

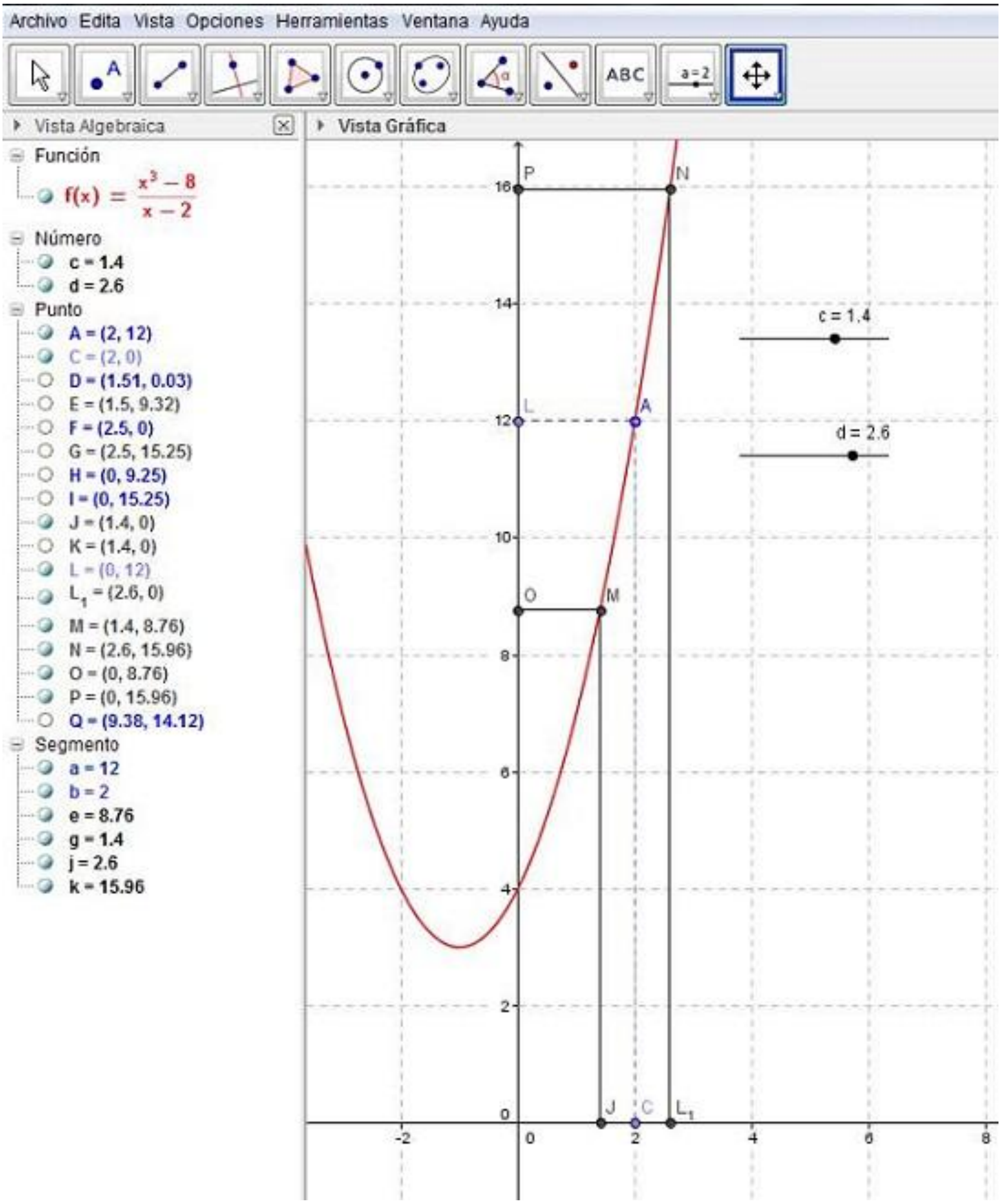
X	1.9	1.99	1.999	1.9999	2	2.0001	2.001	2.01	2.1
$h(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$	11.41	11.9401	11.9940	11.9994		12.0006	12.0060	12.0601	12.61

Representación en GeoGebra

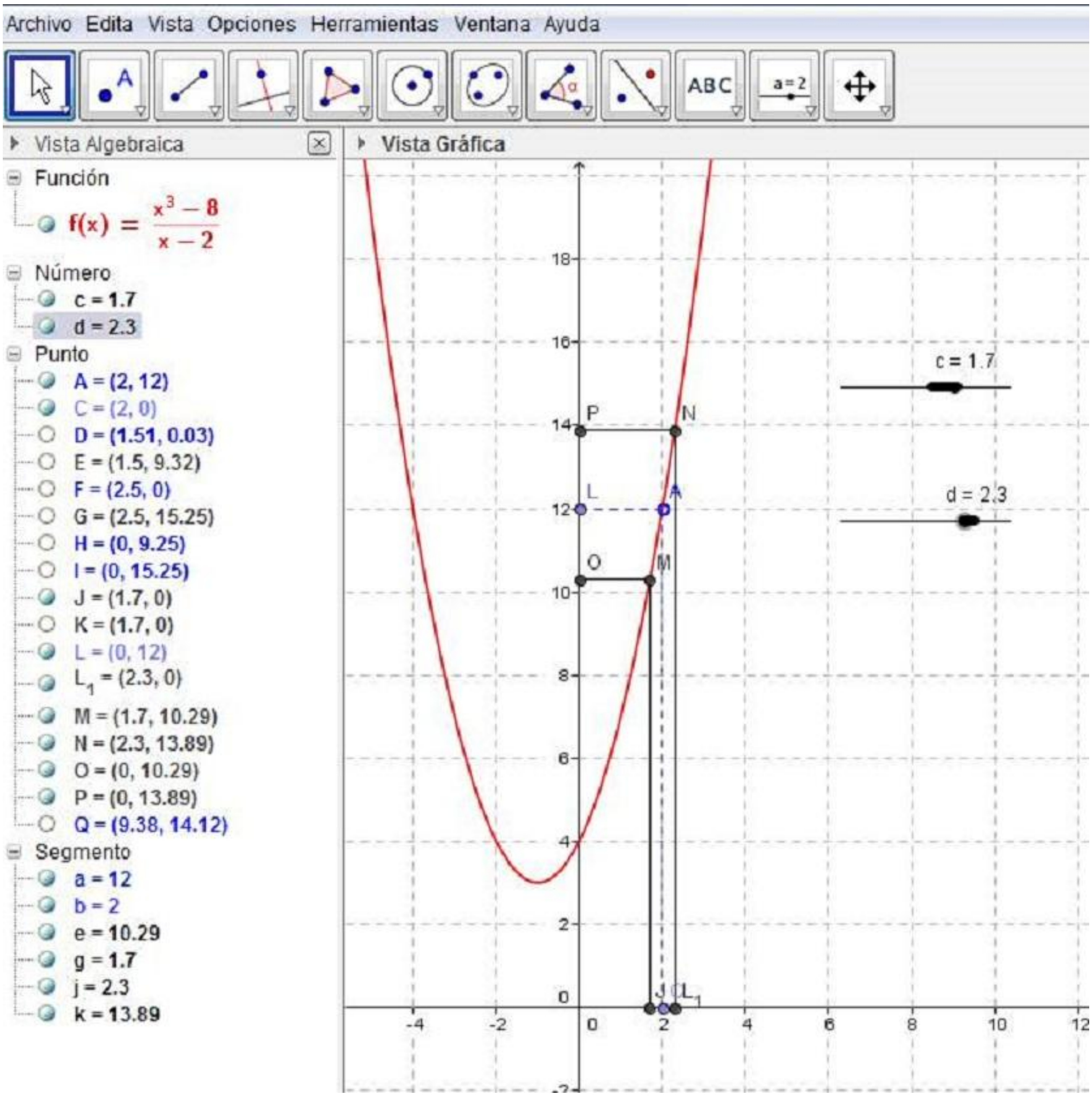
Primera aproximación



Segunda aproximación



Tercera aproximación



6. Evaluación

Para saber en qué estado están en los/as alumnos/as estos saberes se realiza una **evaluación inicial**. Se trata de un cuestionario que los/as estudiantes deben completar referido a sus conocimientos sobre los saberes previos: funciones lineales y cuadráticas, funciones dadas por parte, funciones compuestas, dominio, imagen de las funciones, representación gráfica, conocimiento de herramientas informáticas.

La evaluación formativa y la sumativa. La evaluación formativa se realizará mediante la observación del trabajo en equipo. Se observarán la distribución de roles, la cooperación y la relación entre sus integrantes, si existe una discusión sobre las diferentes propuestas antes de la toma de decisión, el respeto por la opinión ajena, la ayuda a quien presenta alguna dificultad. En el caso del aula virtual se complica evaluar el trabajo en equipo. El/la docente podrá resolver este inconveniente manteniendo, por ejemplo, un diálogo con los integrantes de cada equipo sobre el rol que cumplió cada uno.

También se observará el análisis y el procesamiento de la información y el uso correcto del lenguaje técnico y coloquial. Se evaluará la exposición y defensa de los trabajos finales *(evaluación sumativa)* mediante indicadores de aprendizaje (estrategias, reflexión sobre proceso y resultado…) y, niveles (aprendiz, avanzado y experto). Los/as alumnos/as responderán en el informe final un cuestionario ajustado a los propósitos de analizar la situación de partida, la ejecución, la planificación y la toma de decisiones. A modo de ejemplo: ¿Cuál fue la contribución de cada uno de nosotros? ¿Cómo planificamos el trabajo ¿Qué aprendí del aporte de cada uno de mis compañeros? ¿Resultó provechoso el trabajo en grupo? ¿Cuál puede ser el aporte de ustedes para que la actividad sea más interesante?

Asimismo, en forma similar a la autoevaluación de los/as alumnos/as el/la docente realizará su propia autoevaluación.

¡ÉXITOS!